MINISTÈRES
ÉDUCATION
JEUNESSE
SPORTS
ENSEIGNEMENT
SUPÉRIEUR
RECHERCHE

LBE MAT 1

SESSION 2026

Δ

CAPES ET CAFEP
(BAC +3)
Concours externe

Section
MATHÉMATIQUES

CORRECTIF

Épreuve d'admissibilité 1

Le sujet est constitué de plusieurs exercices ou problèmes.
L'épreuve permet d'apprécier la maîtrise des connaissances disciplinaires et l'aptitude à les mobiliser. Elle sollicite également les capacités de raisonnement, de démonstration et d'expression écrite du candidat, dans un langage adapté.

Durée : 4 heures

L'usage de la calculatrice est autorisé dans les conditions relevant de la circulaire du 17 juin 2021 BOEN du 29 juillet 2021.

L'usage de tout ouvrage de référence, de tout dictionnaire et de tout autre matériel électronique est rigoureusement interdit.

Il appartient au candidat de vérifier qu'il a reçu un sujet complet et correspondant à l'épreuve à laquelle il se présente.

Si vous repérez ce qui vous semble être une erreur d'énoncé, vous devez le signaler très lisiblement sur votre copie, en proposer la correction et poursuivre l'épreuve en conséquence. De même, si cela vous conduit à formuler une ou plusieurs hypothèses, vous devez la (ou les) mentionner explicitement.

NB : Conformément au principe d'anonymat, votre copie ne doit comporter aucun signe distinctif, tel que nom, signature, origine, etc. Si le travail qui vous est demandé consiste notamment en la rédaction d'un projet ou d'une note, vous devrez impérativement vous abstenir de la signer ou de l'identifier.
Le fait de rendre une copie blanche est éliminatoire.

Exercice 1 : Vrai/Faux

Les assertions suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Justifier la réponse donnée. Toute réponse non argumentée ne sera pas prise en compte.

Assertion 1. Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$. Si a est un réel tel que $f'(a) = 0$, alors f admet en a un minimum local ou un maximum local.

Assertion 2. Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\int_0^{n\pi} \sin^2(x)\mathrm{d}x = \frac{n\pi}{2}.$$

Assertion 3. Soit t un réel différent de 1. Dans le plan complexe, on note A le point d'affixe t, B le point d'affixe 1, et C le point d'affixe $1 + i(1 - t)$.
Le triangle ABC est isocèle et rectangle.

Assertion 4. On désigne par $\mathbb{R}[X]$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des polynômes d'une indéterminée X et à coefficients réels. Pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$, par abus de notation on note $P : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction (polynomiale) obtenue en évaluant sur $\mathbb{R}$ le polynôme P. Si $P \in \mathbb{R}[X]$ est de degré impair, alors il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que $P(x) = 0$.

Assertion 5. On rappelle qu'un produit scalaire est une forme bilinéaire symétrique définie positive sur un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. On désigne par $\mathbb{R}_1[X]$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des polynômes d'une indéterminée X et à coefficients réels de degré au plus 1. L'application suivante :

$$\begin{array}{rccl} \phi : \mathbb{R}_1[X] \times \mathbb{R}_1[X] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (P, Q) & \longmapsto & P(0)Q(0) + P(1)Q(1) \end{array}$$

est un produit scalaire.

Assertion 6. Soit n un entier supérieur ou égal à 2. Soient $\omega_0, \ldots, \omega_{n-1} \in \mathbb{C}$ les n racines n-ièmes de l'unité, et soit $p \in [\![1, n-1]\!]$. Alors :

$$\sum_{k=0}^{n-1} {\omega_k}^p = 0$$

Assertion 7. L'équation différentielle :

$$\forall x \in \mathbb{R}, (1 - x)y'(x) + y(x) = 0$$

admet au moins une solution définie sur $\mathbb{R}$ autre que la fonction nulle.

Exercice 2 : Une suite d'intégrales

1. Rappeler le développement en série entière de la fonction exponentielle en précisant le rayon de convergence.

Dans cet exercice, on étudie la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$I_0 = 1 \text{ et, pour } n \geqslant 1, I_n = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\prod_{k=1}^n (x+k)} = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{(x+1)(x+2)\cdots(x+n)}.$$

On rappelle que $0! = 1$.

2. (a) Calculer I_1.

(b) Déterminer a et b tels que pour tout $x \in [0,1]$,

$$\frac{1}{(x+1)(x+2)} = \frac{a}{x+1} + \frac{b}{x+2}.$$

(c) Calculer I_2.

3. (a) Établir que pour tout entier naturel n :

$$\frac{1}{(n+1)!} \leqslant I_n \leqslant \frac{1}{n!}$$

(b) En déduire que la série de terme général I_n converge et déterminer un réel α tel que :

$$\alpha - 1 \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} I_n \leqslant \alpha$$

On rappelle pour la fin de l'exercice que, étant données $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ deux suites à valeurs réelles dont les termes ne s'annulent pas, on dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont équivalentes quand $\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = 1$. On note alors $u_n \sim v_n$.

4. (a) Justifier que pour tout réel $t \in [0,1]$:

$$1 + t \leqslant \exp(t)$$

(b) Établir que, pour tout réel $t \in [0,1]$:

$$t - t^2 \leqslant \ln(1+t)$$

puis que, pour tout réel $t \in [0,1]$:

$$\exp(t - t^2) \leqslant 1 + t$$

Dans la suite, pour tout entier naturel n non nul, on pose :

$H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}$ et $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = 1 + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{n^2}$

5. (a) Rappeler ce qu'est une série de Riemann et à quelle condition nécessaire et suffisante une série de Riemann converge.

(b) En déduire que la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge.

(c) Préciser la limite de la suite $(H_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ quand n tend vers $+\infty$.

6. Soit $n \in \mathbb{N}^*$

(a) Établir que, pour tout réel $x \in [0,1]$:

$$n! \exp(xH_n - x^2 S_n) \leqslant \prod_{k=1}^{n}(x+k) \leqslant n! \exp(xH_n)$$

Indication : Vérifier que $\prod_{k=1}^{n}(x+k) = n! \prod_{k=1}^{n}(1+\frac{x}{k})$ puis utiliser les résultats de la question 4.

(b) En déduire que, pour tout réel $x \in [0,1]$:

$$\frac{1}{n!} \exp(-xH_n) \leqslant \frac{1}{\prod_{k=1}^{n}(x+k)} \leqslant \frac{1}{n!} \exp(-x(H_n - S_n))$$

Partie II – Étude du cas particulier des matrices diagonalisables

Dans cette partie $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, ensemble des matrices carrées de taille n et à coefficients réels, et A est un élément de E. Rappelons qu'étudier si A est une puissance k-ième, c'est chercher s'il existe une matrice M appartenant à $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $M^k = A$. Étudier si A est une puissance universelle, c'est étudier si, pour tout entier naturel non nul k, A est une puissance k-ième.

4. Dans cette question seulement $n = 1$ et on confond $\mathcal{M}_1(\mathbb{R})$ et $\mathbb{R}$. Démontrer que l'ensemble des puissances universelles de $\mathbb{R}$ est $\mathbb{R}^+$.

5. Dans cette question, $n \geqslant 2$ et A, P et D sont trois éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tels que P est inversible, D est diagonale et $A = PDP^{-1}$.

   (a) Soit $k \in \mathbb{N}^*$ et soit $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Vérifier que si $N^k = D$, alors $(PNP^{-1})^k = A$

   (b) Démontrer que A est une puissance universelle si, et seulement si, D est une puissance universelle.

6. Dans cette question, $n \geqslant 2$ et $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est la matrice diagonale suivante :

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

   où les réels $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ sont tous deux à deux distincts.

   (a) Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice qui commute avec D. Démontrer que M est une matrice diagonale.

   (b) Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et soit $k \in \mathbb{N}^*$. Vérifier que si $M^k = D$, alors M et D commutent. En déduire que D est une puissance universelle dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si, et seulement si, ses éléments diagonaux sont positifs.

   (c) Supposons que A est une matrice possédant n valeurs propres réelles et deux à deux distinctes. Quelle est la condition nécessaire et suffisante afin que la matrice A soit une puissance universelle dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$? Justifier.

7. Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, on pose :

$$R_\theta = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

   (a) Démontrer par récurrence que, pour tout $\theta \in \mathbb{R}$ et pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $(R_\theta)^k = R_{k\theta}$. Donner une interpétation géométrique de cette égalité.

   (b) Démontrer que la matrice $R_\pi = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ est une puissance universelle.

8. Dans la question 6 (b) on a montré la propriété suivante :
« Soit D une matrice diagonale à coefficients diagonaux réels deux à deux distincts. D est une puissance universelle si, et seulement si, ses coefficients diagonaux sont positifs»
Peut-on affirmer la propriété suivante ?
« Soit D une matrice diagonale à coefficients réels. D est une puissance universelle si, et seulement si, ses coefficients diagonaux sont positifs»
Justifier votre réponse.

(c) Démontrer alors que :

$$\frac{1-\exp(-H_n)}{n!H_n} \leqslant I_n \leqslant \frac{1-\exp(-(H_n-S_n))}{n!(H_n-S_n)}$$

(d) Établir que $I_n \sim \frac{1}{n!H_n}$.

7. On pose, pour tout entier n supérieur ou égal à 2, $u_n = H_n - \ln(n)$.

(a) Démontrer que pour tout entier $n \geqslant 2$, $u_n = \frac{1}{n} + \sum_{k=1}^{n-1}(\frac{1}{k} - \int_k^{k+1} \frac{dt}{t})$.

(b) En déduire que $(u_n)_{n\geqslant 2}$ est une suite décroissante à valeurs positives.

(c) En déduire que la suite $(u_n)_{n\geqslant 2}$ converge, puis que $I_n \sim \frac{1}{n!\ln(n)}$.

Exercice 3 : Puissances universelles

Dans cet exercice, on se place dans un ensemble E muni d'une structure d'anneau $(E, +, \times)$ et, pour a appartenant à E et k appartenant à $\mathbb{N}^*$, on s'intéresse à l'existence de solutions à l'équation $x^k = a$, d'inconnue x appartenant à E. Plus précisément, soit a un élément de E :

- étant donné un entier naturel non nul k, on dit que a est une puissance k-ième s'il existe x appartenant à E tel que $x^k = a$;

- on dit que a est une puissance universelle si, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, a est une puissance k-ième.

Pour tout anneau E, les éléments 0_E et 1_E (respectivement éléments neutres pour $+$ et $\times$) sont des puissances universelles de E car pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, ${0_E}^k = 0_E$ et ${1_E}^k = 1_E$.
L'exercice a pour objectif d'étudier certains cas particuliers et d'établir quelques résultats généraux, dans divers anneaux usuels. Les deux parties sont indépendantes.

Première partie – dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

Dans cette partie, n est un entier supérieur ou égal à 2, et E désigne $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ muni de ses lois usuelles $+$ et $\times$. On notera $\overline{0}$, $\overline{1}$,..., $\overline{n-1}$ les éléments de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

1. *Un premier exemple.*
Dans cette question seulement, $n = 6$. Ainsi, $E = \mathbb{Z}/6\mathbb{Z} = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{3}, \overline{4}, \overline{5}\}$.

(a) Calculer $\overline{2}^2$, $\overline{3}^2$, $\overline{4}^2$, et $\overline{5}^2$, images respectives de $\overline{2}$, $\overline{3}$, $\overline{4}$ et $\overline{5}$ par l'application $x \mapsto x^2$.

(b) En déduire que $\overline{0}$ et $\overline{1}$ ne sont pas les seules puissances universelles de $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$.

2. *Un deuxième exemple.*
Dans cette question seulement, $n = 4$. Ainsi, $E = \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{3}\}$.
Démontrer, en s'inspirant éventuellement de la question précédente, que $\overline{0}$ et $\overline{1}$ sont les seules puissances universelles de $E = \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$.

3. *Le cas particulier où n est premier.*
Dans cette question uniquement, n est un entier premier, et, par souci de clarté, n sera plutôt désigné par la lettre p.

(a) Énoncer le petit théorème de Fermat.

(b) En déduire à la fois que tout élément de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ est une puissance p-ième, et que $\overline{0}$ et $\overline{1}$ sont les seules puissances universelles de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.

(c) L'hypothèse "n est premier" est-elle une condition nécessaire pour que $\overline{0}$ et $\overline{1}$ soient les seules puissances universelles de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$?

Toutes les variables aléatoires introduites ci-après sont définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Soit $m \in \mathbb{N}^*$ et soit $q \in]0,1[$. On rappelle que la variable aléatoire X suit la loi binomiale de premier paramètre m et de second paramètre q si :

— $X(\Omega) = [\![0, m]\!]$

— $\forall k \in [\![0, m]\!], P(X = k) = \binom{m}{k} q^k (1-q)^{m-k}$

On rappelle que, lorsqu'on répète m fois, et de façon indépendante, la même expérience de Bernoulli dont la probabilité de succès vaut q, alors la loi du nombre de succès obtenus est la loi binomiale de premier paramètre m et de second paramètre q.
On rappelle aussi que si B est un événement de probabilité non nulle et si A est un événement quelconque, on note $P(A|B)$ la probabilité de "A sachant B".

1. *Préliminaire : une suite arithmético-géométrique*
   Dans tout l'exercice, $(p_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ désigne la suite définie par :

   — $p_1 = \frac{1}{6}$

   — $\forall n \in \mathbb{N}^*, p_{n+1} = \frac{5}{6} p_n + \frac{1}{6}$

   Déterminer, pour tout entier naturel n non nul, une expression explicite de p_n en fonction de n.

Soit $N \in \mathbb{N}^*$. Un joueur dispose de N dés classiques à six faces. Il effectue un premier lancer des N dés. À l'issue de ce premier lancer, il met de côté les dés ayant donné 6 et relance les autres (s'il en reste). Il continue ainsi avec pour objectif que tous les dés aient donné 6. Pour tout $\omega \in \Omega$, univers des possibles qu'on ne cherchera pas à expliciter, on note $S_n(\omega)$ le nombre total de dés ayant, après n lancers, donné 6.
On admet que S_n définit bien une variable aléatoire. Si pour un certain rang n_0 , tous les dés ont donné 6, c'est-à-dire si $S_{n_0} = N$, alors on considérera que $S_n = N$ pour tout entier $n \geqslant n_0$.

2. (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Préciser $S_n(\Omega)$, l'univers image de la variable aléatoire S_n.
   (b) Quelle est la loi de S_1 ? On précisera, en le justifiant, ses paramètres.

L'objectif des questions 3 à 5 est d'établir que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, S_n suit la loi binomiale de paramètres N et p_n.

3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, soit $k \in [\![0, N]\!]$, et soit $i \in [\![0, k]\!]$. Justifier que :

$$P(S_{n+1} = k | S_n = i) = \binom{N-i}{k-i} \frac{1}{6^{k-i}} \left(\frac{5}{6}\right)^{N-k}$$

4. Dans cette question et dans cette question seulement, on se donne $n \in \mathbb{N}^*$ et on suppose que S_n suit une loi binomiale de premier paramètre N et de second paramètre p_n.
   (a) Démontrer que, pour tout $k \in [\![0, N]\!]$,

$$P(S_{n+1} = k) = \sum_{i=0}^{k} \binom{N}{i} p_n^i (1-p_n)^{N-i} \binom{N-i}{k-i} \frac{1}{6^{k-i}} \left(\frac{5}{6}\right)^{N-k}$$

   Indication : on pourra appliquer la formule des probabilités totales en remarquant que $((S_n = i))_{i\in[\![0,N]\!]}$ est un système complet d'événements.
   (b) Vérifier que pour tout $k \in [\![0, N]\!]$, pour tout $i \in [\![0, k]\!]$:

$$\binom{N}{i}\binom{N-i}{k-i} = \binom{N}{k}\binom{k}{i}$$

(c) Obtenir alors que, pour tout $k \in [\![0, N]\!]$:

$$P(S_{n+1} = k) = \binom{N}{k} \left(\frac{1+5p_n}{6}\right)^k \left(1 - \frac{1+5p_n}{6}\right)^{N-k}$$

5. Démontrer par récurrence et grâce aux questions précédentes, que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, S_n suit une loi binomiale de premier paramètre N et de second paramètre $1 - (\frac{5}{6})^n$.

Dans la suite de l'exercice, on définit la variable aléatoire T par :

$$\forall \omega \in \Omega, \quad T(\omega) = \begin{cases} \min\{n \in \mathbb{N}^* \mid S_n(\omega) = N\} & \text{si } \{n \in \mathbb{N}^* \mid S_n(\omega) = N\} \neq \varnothing \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Ainsi T représente le nombre de lancers nécessaires pour que tous les dés aient donné 6, en posant $T = 0$ si on n'obtient jamais tous les 6.

6. (a) Justifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $P(1 \leqslant T \leqslant n) = \left(1 - (\frac{5}{6})^n\right)^N$

   (b) En déduire la valeur de $\sum_{k=1}^{+\infty} P(T = k)$ puis démontrer que $P(T = 0) = 0$. Comment interpréter ce résultat ?

FIN DU SUJET